Chapitre 17

Relations binaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E est un ensemble quelconque.

1 Définitions et exemples

Définition 17.1 – Définition "intuitive"

Une relation (binaire) sur E est la donnée d'une assertion $P(x,y)$ qui dépend de deux éléments $x,y \in E$ quelconques. Si on note cette relation $\mathcal{R}$, on écrira pour la définir :

$$x\mathcal{R}y \iff P(x,y)$$

La valeur de vérité de l'assertion $P(x,y)$ dépend bien sûr de x et de y. Le symbole $\mathcal{R}$ est souvent remplacé par d'autres : $\sim$, $\preceq$, $|$, etc.

Exemple 1.

- Sur $\mathbb{Z}$, on peut définir la relation "divise" : $b \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$. Avec cette définition :

$$2|\,4 \text{ est vrai} \qquad 7|\,6 \text{ est faux} \qquad 0 \mid 0 \text{ est ....}$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On peut définir la relation "congru modulo m" sur $\mathbb{Z}$ par : $a \equiv b\ [m] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a - b = mk$. Avec cette définition :

$$14 \equiv 2\ [3] \qquad \text{mais on a aussi} \qquad 14 \equiv 5\ [3] \qquad 14 \equiv -1\ [3] \quad \ldots$$

2 Relation d'équivalence

2.1 Définition

Définition 17.2 – Relation d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation (binaire) sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd
2. $\mathcal{R}$ est symétrique, càd
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd

Théorème 17.3

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La relation "congru modulo m" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration.

□

Exemple 2.
- Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (par exemple $\alpha = 2\pi$), on peut montrer que la relation "congru modulo α" est aussi une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- Dans tout ensemble E, la relation d'égalité $x\mathcal{R}y \iff x = y$ est aussi une relation d'équivalence.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas ....

2.2 Aparté : union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles

On a déjà évoqué au chapitre 2 (Ensembles) l'union et l'intersection d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E. Nous allons généraliser cela à une famille $(A_i)_{i\in I}$ qui est indexée par un ensemble I non vide.

Définition 17.4 – Union et intersection

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par un ensemble I non vide (possiblement infini).

1. On définit l'intersection des A_i comme étant l'ensemble

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\right\}$$

2. On définit la réunion des A_i comme étant l'ensemble

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\right\}$$

3. On dit que les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints si

$$\forall i,j \in I \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

4. On dit que les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont disjoints dans leur ensemble si $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$.

Exemple 3. Pour toute application $f : E \to F$, l'ensemble des valeurs que prend f est :

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} = \bigcup_{x\in E} \{f(x)\}$$

Définition 17.5 – Partition

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si :

1. $\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing$
2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$
3. Les ensembles de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Rappel : si la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partiiton de E, chaque élément de E est dans exactement un et un seul des ensembles de $(A_i)_{i\in I}$.

Exemple 4.

- La famille $\left(\left[k, k+1\right[\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- La famille $(\{k\})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{Z}$, de même que la famille $(\{x\})_{x\in\mathbb{R}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.
- Les ensembles $2\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z}+1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

2.3 Classes d'équivalence

Définition 17.6 – Classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, on définit la classe d'équivalence de x comme étant l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

On la note parfois aussi $\bar{x}$. Un élément quelconque $y \in \bar{x}$ est dit un représentant de la classe.

Remarque. Par symétrie, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$y \in \mathrm{cl}(x) \iff x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x \iff x \in \mathrm{cl}(y)$$

Exemple 5.

- Dans tout ensemble E, pour la relation $\mathcal{R}$ d'égalité[1], pour tout $x \in E$, on a
- Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 3", alors
  - Dans cette classe, on peut prendre comme représentant 2, ou 5 ou encore -7, etc.
  - On peut remarquer que $\mathrm{cl}(2) = \mathrm{cl}(5) = \mathrm{cl}(8) = \mathrm{cl}(-1)$, etc.

Théorème 17.7 – Propriétés des classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x, y \in E$.

1. On a $x \in \mathrm{cl}(x)$. En particulier, $\mathrm{cl}(x) \neq \varnothing$.
2. Si $x\mathcal{R}y$, alors $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.
3. **Les (différentes) classes d'équivalence forment une partition de E.**

Démonstration.

1. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x\mathcal{R}x$ donc $x \in \mathrm{cl}(x)$.
2.

1. définie pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ par : $\quad x\mathcal{R}y \iff x = y$

3. La famille de toutes les classes d'équivalence de E est $(\mathrm{cl}(x))_{x\in E}$. Cependant, deux ensembles de cette famille peuvent être égaux (comme $\mathrm{cl}(2) = \mathrm{cl}(5)$ dans l'exemple 5). On va donc considérer la famille de classes d'équivalences **distinctes**, qu'on note $(A_i)_{i\in I}$ (avec I un ensemble qui permet de paramétrer ces classes). Donc, par construction, si $i \neq j$, alors $A_i \neq A_j$.
   Pour tout $i \in I$, comme A_i est une classe d'équivalence, il existe $x_i \in E$ tel que $A_i = \mathrm{cl}(x_i)$.

□

Exemple 6. Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 3", alors il y a 3 (différentes) classes d'équivalence :

$$\overline{0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \ [3]\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$$
$$\overline{1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \ [3]\} = 3\mathbb{Z} + 1$$
$$\overline{2} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 2 \ [3]\} = 3\mathbb{Z} + 2$$

On vérifie que ces 3 classes forment bien une partition de $\mathbb{Z}$. En particulier, tout entier est dans une et une seule de ces classes.

3 Relation d'ordre

3.1 Définitions

Définition 17.8 – Relation d'ordre

Une relation $\mathcal{R}$ définie sur E est une relation d'ordre si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique, càd
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd

On appelle ensemble ordonné un couple $(E, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

Les relations d'ordre sont plutôt notées en général $\preceq$ que $\mathcal{R}$.

Exemple 7. ∘ Sur $\mathbb{R}$, la relation $x \preceq y \iff x \leq y$ est une relation d'ordre. On vérifie facilement la réflexivité et la transitivité. L'antisymétrie découle du fait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x) \implies x = y$$

- ∘ Il en va de même pour la relation $x \preceq y \iff x \geq y$.
- ∘ Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre.
- ∘ Sur $\mathbb{R}$, la relation $x \preceq y \iff x < y$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas ....

Définition 17.9

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $x, y \in E$. On dit que x, y sont comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Définition 17.10 – Ordre total et partiel

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\preceq$ définit un ordre total sur E si tout couple d'éléments de E sont comparables, i.e. :

$$\forall x, y \in E \quad (x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x)$$

Si $\preceq$ n'est pas un ordre total, on dit que $\preceq$ est un ordre partiel.

En particulier, l'ordre est partiel si et seulement s'il existe deux éléments qui ne sont pas comparables.

Exemple 8. Parmi les exemples précédents :

- ∘ $\leq$ est une relation d'ordre total : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- ∘ Il en va de même pour $\geq$.
- ∘ Par contre, $\subset$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{P}(E)$, sauf exception. Par exemple, avec $E = \{0, 1\}$, les ensembles $\{0\}$ et $\{1\}$ ne sont pas comparables car :

$$\{0\} \not\subset \{1\} \qquad \text{et} \qquad \{1\} \not\subset \{0\}$$

3.2 Vocabulaire lié à l'ordre, revisité

Définition 17.11 – Vocabulaire lié à l'ordre

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et A une partie de E.

- $m \in E$ est un minorant de A si $\quad \forall x \in A \quad m \preceq x$
- $M \in E$ est un majorant de A si $\quad \forall x \in A \quad x \preceq M$
- A est majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. minorant).
- A est bornée si A est majorée et minorée.
- $m \in E$ est **le** plus petit élément (ou minimum) de A si m est un minorant de A et $m \in A$.
- $M \in E$ est **le** plus grand élément (ou maximum) de A si M est un majorant de A et $M \in A$.

Théorème 17.12 – Unicité du maximum / minimum

Le plus petit élément (resp. le plus grand) de A, s'il existe, est unique.

Démonstration.

□

Exemple 9. Pour la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$, les notions de majorant et de maximum se confondent avec celles déjà vues au chapitre 11 (Nombres réels).

Exemple 10. On pose $E = \{0, 1, 2\}$. On munit $\mathscr{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et on pose

$$A = \Big\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\Big\}$$

Déterminer un majorant de A. Est-ce que A admet un maximum ?

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Apprendre. Son. Cours.